Diferencias Finitas

Problemas de calibración: BC Neumman y κ variable

Modelación computacional en las ciencias y las ingenierías como apoyo en el proceso enseñanza-aprendizaje (PAPIME-PE101019)

Instituto de Geofísica
Universidad Nacional Autónoma de México

Contenido

Contenido

Modelo Matemático

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2T(x)}{dx^2} + \omega^2 T(x) &= 0 \quad x \in [0,1] \\ T(0) &= 1 \\ T(1) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

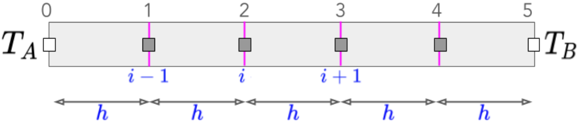
cuya solución analítica es: $T(x) = \dfrac{1-\cos(\omega)}{\sin(\omega)}\sin(\omega x) + \cos(\omega x)$

donde $\omega =$ constante.

Modelo Numérico

Recordemos que la segunda derivada se puede aproximar como sigue (véase la figura como referencia):

$$\boxed{\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \qquad (2)$$



Usando (2) en (1) obtenemos

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \omega^2 T_i = 0$$

que podemos escribir como:

$$-T_{i+1} + (2 - \omega^2/r_i)T_i - T_{i-1} = 0$$

donde $r_i = \dfrac{\kappa_i}{h^2}$ y en este caso $\kappa_i = 1$, $\forall i$.

Modelo Numérico

El sistema lineal para este caso, para cualquier N, es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2-\omega^2/r & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2-\omega^2/r & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2-\omega^2/r & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2-\omega^2/r & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2-\omega^2/r \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{N\times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_N} = \underbrace{\frac{1}{r}\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_A \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_N}$$

donde $r = \dfrac{\kappa}{h^2}$ y $S_i = 0$, $\forall i$.

Ejercicio 3.

Usando como base el código del Ejercicio 2, resuelva el sistema lineal de este problema de calibración. Para ello utilice el notebook `E03_Calibracion1.ipynb`, del repositorio Mixbaal. Note que ya existe la siguiente función:

```
def buildMatrix(N, d):
```

Esta función construye la matriz del sistema y recibe como parámetros el tamaño del sistema N y el contenido de la diagonal principal, `d`, de la matriz, que en este caso debe ser: $2 - \omega^2/r$. Realice lo siguiente:

1. Agregue una celda para definir los parámetros físicos y numéricos del problema (de manera similar al ejercicio 2).
2. Agregue una celda para resolver el sistema lineal. Observe que en este caso la construcción de la matriz deberá realizarse como sigue:

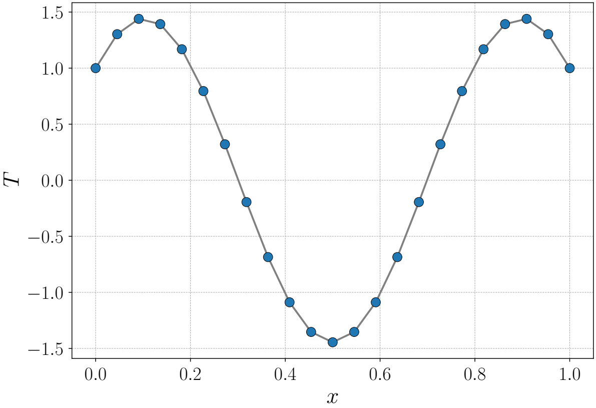
```
A = buildMatrix(N, 2 - w**2/r)
```

3. Reproduzca la gráfica de la siguiente página en donde se usó $\omega = 2.5\pi$.

```
w = 2.5 * np.pi
```

Solución:

```
T =  [ 1.          1.30272968  1.43942855  1.39267454  1.16842639  0.79526416
  0.32074678 -0.19464927 -0.68523757 -1.08849344 -1.35302256 -1.44511112
 -1.35302256 -1.08849344 -0.68523757 -0.19464927  0.32074678  0.79526416
  1.16842639  1.39267454  1.43942855  1.30272968  1.        ]
```



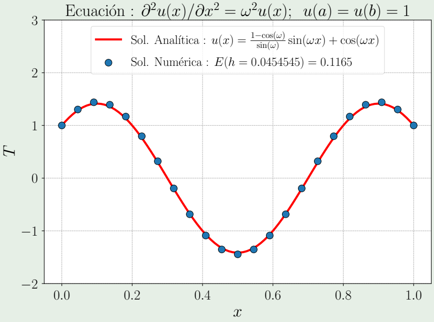
Ejercicio 3.

4. Agregue una celda con la implementación de la solución exacta:

```
def solExact(x, w):
    return ((1.0 - np.cos(w))/np.sin(w)) * np.sin(w * x) + np.cos(w * x)
```

5. Calcule la solución exacta, compare con la solución numérica calculando la norma L-2 del error absoluto y reproduzca la gráfica de abajo:

```
Error = np.linalg.norm(solExact(x,w) - T, 2) # Norma L-2 del error absoluto
```



Contenido

Modelo Matemático

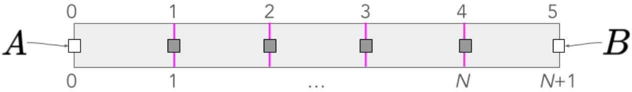
Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u(x)}{dx^2} &= e^x \quad x \in [0,1] \\
\frac{du}{dn}(0) &= 0 \\
u(1) &= 3
\end{aligned}
$$

cuya solución analítica es: $u(x) = e^x - x - e + 4$

A continuación mostramos cuatro aproximaciones que se pueden usar para incorporar las condiciones de tipo Neumman en el sistema lineal.

Aproximación de primer orden, sistema de $(N+1)\times(N+1)$



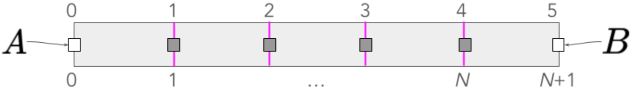
$$u_0 = A$$
$$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$$
$$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = B \Longrightarrow \frac{u_{N+1} - u_N}{h} = B$$
$$\Longrightarrow \boxed{-u_N + u_{N+1} = hB}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ hB \end{bmatrix}$$

donde $f(x) = e^x$, por lo tanto $f(x_i) = f_i = e^{x_i}$

Aproximación de primer orden, sistema de $N \times N$

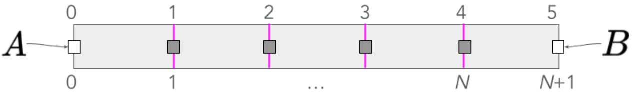


$$u_0 = A$$
$$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$$
$$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = B \Longrightarrow \boxed{u_{N+1} = hB + u_N}$$
$$u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1} = r^{-1} f_N$$
$$\Rightarrow \boxed{u_{N-1} - u_N = r^{-1} f_N - hB}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{N \times N} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -hB \end{bmatrix}$$

Aproximación de segundo orden usando tres puntos

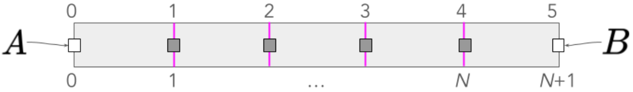


$$u_0 = A.$$
$$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$$
$$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = \boxed{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}u_{N-1} - 2u_N + \frac{3}{2}u_{N+1}\right) = B}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ hB \end{bmatrix}$$

Aproximación de segundo orden con diferencias centrales



$$u_N - 2u_{N+1} + u_{N+2} = r^{-1} f_{N+1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = \frac{(u_{N+2} - u_N)}{2h} = B \implies u_{N+2} = 2hB + u_N$$

$$\implies \boxed{u_N - u_{N+1} = \frac{1}{2r} f_{N+1} - hB}$$

$u_0 = A.$

$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$

$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$

$$\implies \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ f_{N+1}/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -hB \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.

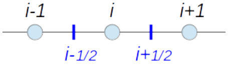
1. aaa

Contenido

Modelo Matemático y Numérico

Considere la ecuación de Poisson con κ variable y condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

$$\frac{d}{dx}\left(\kappa\frac{du}{dx}\right) = f \quad \text{con} \quad \kappa = \kappa(x) \qquad (3)$$



Definimos $g = \kappa\dfrac{du}{dx}$ por lo tanto $\dfrac{d}{dx}\left(\kappa\dfrac{du}{dx}\right) = \dfrac{dg}{dx}$. Esta derivada se puede aproximar como sigue (véase la figura):

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_i = \frac{g_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{\left[\kappa\frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} - \left[\kappa\frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}}}{h} \qquad (4)$$

$$\left[\kappa\frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} = \kappa_{i+\frac{1}{2}}\left[\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right] = \frac{1}{h}\left[\kappa_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1} - \kappa_{i+\frac{1}{2}}u_i\right] \qquad (5)$$

$$\left[\kappa\frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}} = \kappa_{i-\frac{1}{2}}\left[\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right] = \frac{1}{h}\left[\kappa_{i-\frac{1}{2}}u_i - \kappa_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}\right] \qquad (6)$$

Modelo Numérico

Usando (4), (5) y (6) en (3) obtenemos:

$$\boxed{\frac{1}{h^2}\left[\kappa_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1} - (\kappa_{i+\frac{1}{2}} + \kappa_{i-\frac{1}{2}})u_i + \kappa_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}\right] = f_i} \tag{7}$$

Condiciones de frontera tipo Dirichlet: $u_0 = A$ y $u_{N+1} = B$

$$\begin{array}{rcrcl} i = 1 & \Longrightarrow & \kappa_{1+\frac{1}{2}}u_2 - (\kappa_{1+\frac{1}{2}} + \kappa_{1-\frac{1}{2}})u_1 & = & h^2 f_1 - \kappa_{1-\frac{1}{2}}A \\ i = N & \Longrightarrow & -(\kappa_{N+\frac{1}{2}} + \kappa_{N-\frac{1}{2}})u_N + \kappa_{N-\frac{1}{2}}u_{N-1} & = & h^2 f_N - \kappa_{N+\frac{1}{2}}B \end{array}$$

Donde $\kappa_{i+\frac{1}{2}}$ y $\kappa_{i-\frac{1}{2}}$ se pueden aproximar de varias maneras, por ejemplo:

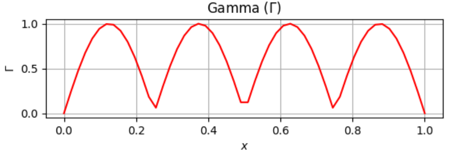
Promedio aritmético: $\kappa_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{\kappa_{i+1} + \kappa_i}{2}$ y $\kappa_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{\kappa_{i-1} + \kappa_i}{2}$

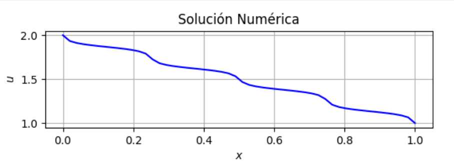
Media armónica: $\kappa_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\kappa_{i+1} + \kappa_i}$ y $\kappa_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{2\kappa_{i-1}\kappa_i}{\kappa_{i-1} + \kappa_i}$

Ejercicio 5.

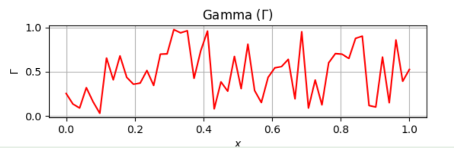
Reproducir los siguientes casos:

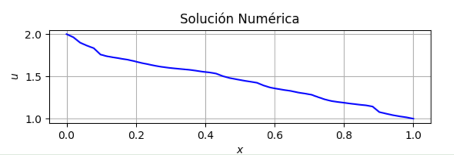
1. $L = 1,\ N = 50,\ A = 2.0,\ B = 1.0,\ \kappa = |sin(4\pi x)|$





2. $L = 1,\ N = 50,\ A = 2.0,\ B = 1.0,\ \kappa =$ `random(x)`





Contenido

- [1] Bergman, T.L. and Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. and Lavine, A.S.,
  Fundamentals of Heat and Mass Transfer,
  Wiley, **2011**.
- [2] R.J. Leveque,
  Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady State and Time-Dependent Problems ,
  Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, **2007**.
- [3] Y. Saad
  Iterative Methods for Sparse Linear Systems.
  PWS/ITP 1996.
  Online: http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html, **2000**
- [4] Richard Burden and J. Douglas Faires
  Numerical Analysis
  Cengage Learning; 9 edition (August 9, **2010**)
- [5] I. Herrera & G. F. Pinder,
  Mathematical Modeling in Science and Engineering: An Axiomatic Approach,
  John Wiley **2012**.

Contenido

Créditos

Dr. Luis M. de la Cruz Salas

Departamento de Recursos Naturales

Instituto de Geofísica

Universidad Nacional Autónoma de México

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101019