Diferencias Finitas

Ecuación de onda

Modelación computacional en las ciencias y las ingenierías como apoyo en el proceso enseñanza-aprendizaje (PAPIME-PE101019)

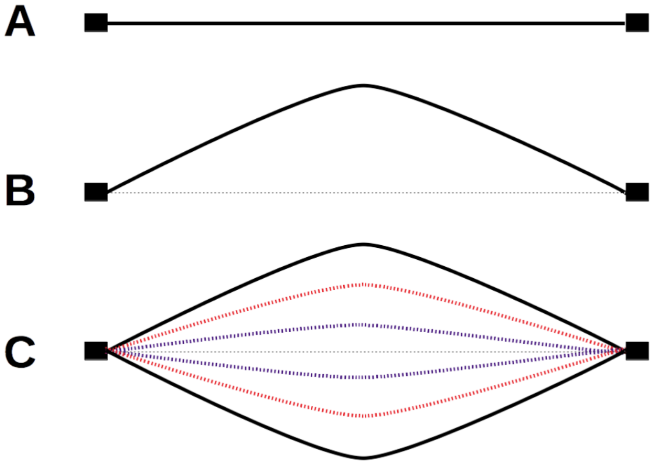
Instituto de Geofísica
Universidad Nacional Autónoma de México

Contenido

MODELO CONCEPTUAL

Ecuación de Onda: Modelo Conceptual

Objetivo: Modelar el movimiento de una cuerda sujeta en ambos extremos y con una condición inicial como la que se muestra en la figura B.



MODELO MATEMÁTICO

Ecuación de Onda: Modelo Matemático

- La ecuación de onda está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \;\; 0 < x < L, \;\; t > 0$$

  donde α es una constante que depende de las condiciones físicas del problema.

- Condiciones de frontera (la cuerda está fija en ambos extremos):

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \text{ para } t > 0, \\ u(l,t) &= 0 \text{ para } t > 0, \end{aligned}$$

- Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L \quad \text{(Forma inicial de la onda)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L \quad \text{(Velocidad inicial de la onda)} \end{aligned}$$

MODELO
NUMÉRICO

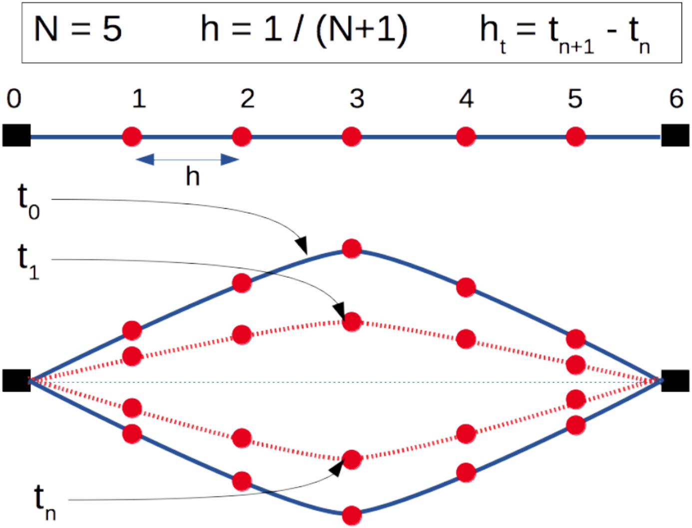
Ecuación de Onda: Modelo Numérico

Definimos lo siguiente:

- Partición del dominio físico (construcción de la malla):
  - Definimos un entero $N > 0$ que representa el número de incógnitas en el eje x
  - Calculamos el espaciamiento mediante: $h = L/(N+1)$.
- Paso de tiempo y el número de pasos de la simulación:
  - Definimos $h_t > 0$ como paso de tiempo[1].
  - Definimos N_t como el número total de pasos de simulación.
  - Calculamos $T_{max} = h_t * N_t$ que es el tiempo total de simulación.
- Podemos entonces calcular:
  - $x_i = i * h$ para $i = 0, 1, \ldots, N+1$ y
  - $t_n = n * h_t$ para $n = 0, 1, \ldots, N_t$
- Notación:
  - $u(x_i, t_n) \equiv u_{i,n}$ para $i = 0, 1, \ldots, N+1$ y $n = 0, 1, \ldots, N_t$.

[1] Este número debe cumplir ciertos criterios de estabilidad del método.

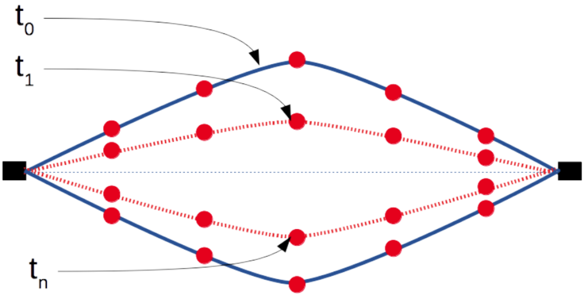
Ecuación de Onda: Modelo Numérico



Ecuación de Onda: Modelo Numérico

- La ecuación de onda en un punto de la malla (espacial y temporal) se escribe como:

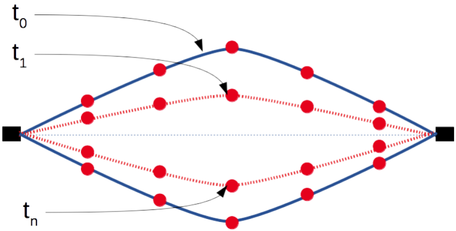
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = 0,$$



Ecuación de Onda: Modelo Numérico

- Cada término de la ecuación lo aproximamos como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1})}{h_t^2} + O(h_t^2) \\
&= \frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{h_t^2} + O(h_t^2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2} + O(h^2) \\
&= \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{h^2} + O(h^2)
\end{aligned}$$



Ecuación de Onda: Modelo Numérico

- Sustituyendo las ecuaciones en diferencias en la ecuación diferencial y despejando $u_{i,n+1}$ se obtiene:

$$\boxed{u_{i,n+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,n} + \lambda^2(u_{i+1,n} + u_{i-1,n}) - u_{i,n-1}} \tag{1}$$

donde $\lambda = \alpha h_t/h$ con $i = 1,\ldots,N$ y $n = 1,\ldots,N_t - 1$

- La ecuación (1) requiere de condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= f(x_i) \quad \text{para } i = 1,\ldots,N \qquad \text{(cond. inicial)} \\ u_{0,n} &= 0 \quad \text{para } j = 1,\ldots,N_t \qquad \text{(cond. de frontera)} \\ u_{N+1,n} &= 0 \quad \text{para } j = 1,\ldots,N_t \qquad \text{(cond. de frontera)} \end{aligned}$$

- El algoritmo empieza en $n = 1$ para calcular $u_{i,2}$ para todas las i's:
  - $\boxed{u_{i,2} = 2(1-\lambda^2)u_{i,1} + \lambda^2(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}) - u_{i,0}}$
  - Es decir, necesitamos conocer $u_{i,0}$ y $u_{i,1}$, para calcular $u_{i,2}$.
  - $u_{i,0}$ está dado por las condiciones de iniciales.
  - **¿Cómo obtenemos $u_{i,1}$?**

Ecuación de Onda: Modelo Numérico

- Para calcular $u_{i,1}$ definimos el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L$$

Obsérvese que este problema representa la velocidad inicial de la onda y es una condición inicial del problema.

1. Usando Forward Euler ($O(h_t)$) tenemos que:

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_t} = g_i \Longrightarrow \boxed{u_{i,1} = u_{i,0} + h_t g_i}$$

2. Otra forma que proporciona una precisión de $O(h_t^3)$ es:

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= (1-\lambda^2)u_{i,0} + \frac{\lambda^2}{2}\left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right] + h_t g_i \\ \Longrightarrow u_{i,1} &= (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\left[f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\right] + h_t g_i \end{aligned}$$

   donde $f(x)$ es la condición inicial (forma inicial de la onda).

En ambos casos para $i = 1, \ldots, N$.

Ejercicio 12: Ecuación de onda

Implementar la solución numérica de la ecuación de onda, presentada antes, con los siguientes parámetros:

- Longitud del dominio, $L = 1$.
- Número de incógnitas $N = 20$.
- Tiempo máximo de simulación $T_{max} = 1$.
- Paso de tiempo 0.05.
- Parámetro α igual a 2.
- Condiciones de frontera tipo Dirichlet igual a cero.
- Condición inicial: $u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x)$.
- Velocidad inicial: $g(x) = 0$

Este ejemplo tiene la siguiente solución analítica: $u(x, t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t)$

Entrege su código documentado en una notebook de nombre `E12_EcuacionDeOnda.ipynb`.

Ejercicio 12: Solución

Definición de los parámetros del problema:

- Tamaño del dominio L y número de incógnitas N.
- Tamaño de paso del tiempo, tiempo total de simulación T_{max} y número total de pasos N_t.
- Datos físicos: α.
- Cálculo de algunas constantes: h, N_t y λ.

```
L = 1          # Longitud del dominio
N = 9          # Numero de incognitas internas
Tmax = 1.0     # Tiempo maximo de simulacion
ht = 0.05      # Paso de tiempo
alpha = 2      # Dato fisico
h = L / (N+1)  # Tamanio de la malla espacial

Nt = int(Tmax / ht)     # Numero total de pasos
lamb = alpha * ht / h   # Parametro lambda
Tmax = Nt * ht          # Tiempo total de simulacion
```

Ejercicio 12: Solución

Definición de algunas funciones:

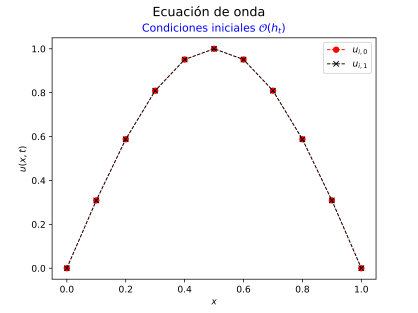
- Condición inicial: $f(x)$.
- Velocidad inicial de la onda: $g(x)$.
- Solución exacta.
- Cálculo del error.
- Condiciones iniciales.

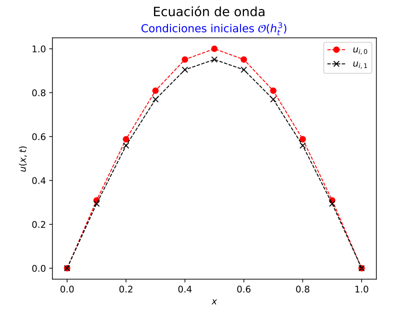
```
def f(x):
    return np.sin(np.pi * x)

def g(x):
    return 0

def solExacta(x, t):
    return np.sin(np.pi * x) * np.cos(2 * np.pi * t)

def calcError(sol_n, sol_e):
    return np.abs(sol_n-sol_e)

def condicionesIniciales(l, ht, u, x, op=1):
    N = len(u)
    w = np.zeros(N)
    for i in range(1,N-1):
        if op == 1:
            w[i] = u[i] + ht * g(x[i])
        else:
            w[i] = (1 - l**2) * u[i] + 0.5 * l**2 * (u[i+1] + u[i-1]) + ht * g(x[i])
    return w
```

Ejercicio 12: Solución

Checar las condiciones iniciales

```
x = np.linspace(0,L,N+2)  # Coordenadas de la malla
u = f(x)                  # Condicion inicial
w = condicionesIniciales(lamb, ht, u, x, op=2) # Euler :op = 1
plt.suptitle('Ecuacion␣de␣onda', fontsize=14)
plt.plot(x, u,'ro--', lw = 1, label = "$u_{i,0}$")
plt.plot(x, w,'kx--', lw = 1, label = "$u_{i,1}$")
plt.title('Condiciones␣iniciales␣$\mathcal{O}(h_t)$', color='blue', fontsize=12)
plt.ylabel('$u(x,t)$')
plt.xlabel('$x$')
plt.savefig('condicion_03.pdf')
```





Ejercicio 12: Solución

- Cálculo de la solución numérica:

$$u_{i,n+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,n} + \lambda^2(u_{i+1,n} + u_{i-1,n}) - u_{i,n-1}$$

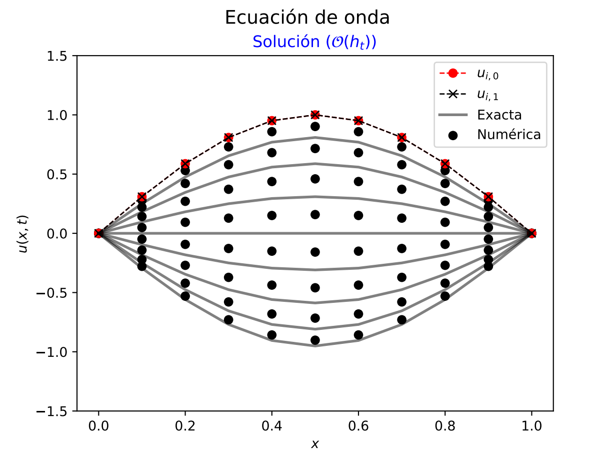
para $i = 1, \ldots, N$ y $n = 1, \ldots, N_t - 1$

```
def solver(u, w, N, x, Nt, l):
    s = np.zeros(N)
    for n in range(1,Nt):
        for i in range(1,N+1):
            s[i] = 2 * (1 - l**2) * w[i] + l**2 * (w[i+1] + w[i-1]) - u[i]
        u = w.copy()
        w = s.copy()

        plt.plot(x,s,'--')
    return s
```

EJERCICIO 12: SOLUCIÓN

Cálculo de la solución con condición inicial $\mathcal{O}(h_t)$:

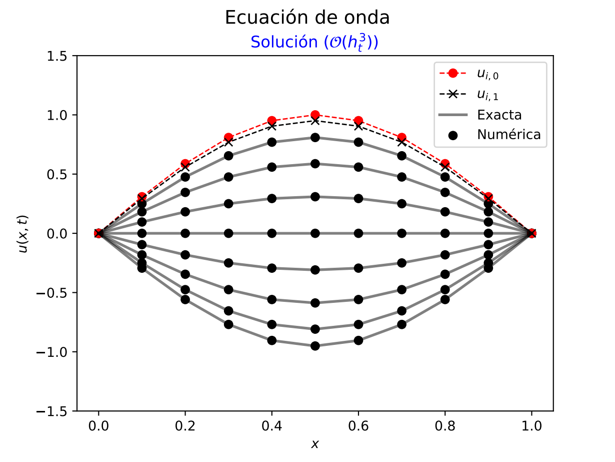
```
w = condicionesIniciales(lamb, ht, u, x, op = 1) # Euler :op = 1
s = solver(u, w, N, x, Nt, lamb)
```



Ejercicio 12: Solución

Cálculo de la solución con condición inicial $\mathcal{O}(h_t^3)$:

```
w = condicionesIniciales(lamb, ht, u, x, op = 2) # O(h^3) :op = 2
s = solver(u, w, N, x, Nt, lamb)
```



Ecuación de Onda: Estabilidad del algoritmo

Ejercicio 12: Solución

- El método es de orden $O(h^2 + h_t^2)$.
- El método converge cuando las funciones f y g son suficientemente diferenciables.
- El método explícito presentado aquí es condicionalmente estable.
- Se requiere que $\lambda = \alpha h_t/h \leq 1$ para obtener estabilidad.
- En nuestro ejemplo de calibración se tiene que $\alpha = 2$, $h_t = 0.05$ y $h = 0.1$ lo que implica que $\lambda = 1$.

Contenido

[1] Richard Burden and J. Douglas Faires
Numerical Analysis
Ninth Edition, 2011 Brooks/Cole, Cengage Learning

[2] R.J. Leveque,
Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady State and Time-Dependent Problems ,
Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2007.

Contenido

Créditos

Dr. Luis M. de la Cruz Salas

Departamento de Recursos Naturales

Instituto de Geofísica

Universidad Nacional Autónoma de México

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101019