Diferencias Finitas

Convección

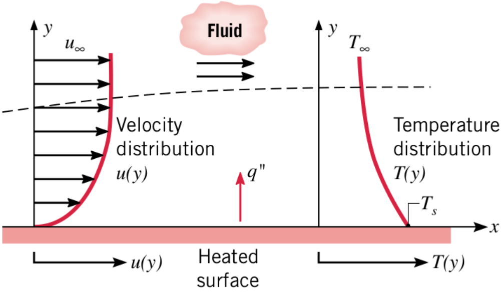
Modelación computacional en las ciencias y las ingenierías como apoyo en el proceso enseñanza-aprendizaje (PAPIME-PE101019)

Instituto de Geofísica
Universidad Nacional Autónoma de México

Contenido

MODELO CONCEPTUAL

¿Qué es la convección de calor? [1]



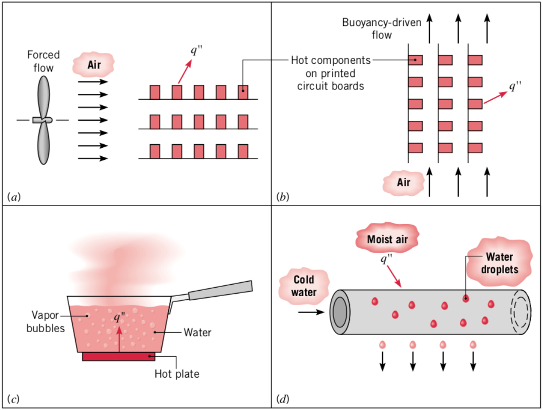
La transferencia de calor por convección consiste de dos mecanismos:

- **Difusión**: transferencia de energía debida al movimiento aleatorio molecular (difusión).
- **Advección**: movimiento de un fluido.

En la **convección**, el movimiento de un fluido en la presencia de un gradiente de temperaturas, es lo que genera la transferencia de calor.

¿Qué es la convección de calor? [1]

Transferencia de calor por convección.



(a) Forced convection. (b) Natural convection. (c) Boiling. (d) Condensation.

MODELO MATEMÁTICO

Ecuación “general” de transporte de calor

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} + c_p\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jT) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = S \qquad (1)$$

Símbolo		Unidades
	Parámetros físicos	
c_p	Capacidad calorífica específica.	[J / Kg °K]
ρ	Densidad.	[Kg / m^3]
κ	Conductividad térmica.	[W / m °K]
S	Ganancia (fuente) o pérdida (sumidero) de calor	[J/m^3 s]
$\alpha = \dfrac{\kappa}{c_p\rho}$	Difusividad térmica.	[m^2/s]
	Variables independientes	
x_j	Coordenadas de la posición: $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$.	[m]
t	Tiempo.	[s]
	Variables dependientes	
T	Temperatura.	[°K]
u_j	Componentes de la velocidad: $(u_1, u_2, u_3) \equiv (u_x, u_y, u_z)$.	[m/s]

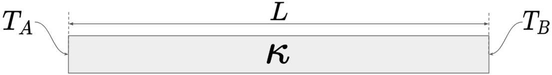
Convección no estacionaria

Consideramos $\rho = constante$ (fluido incompresible) y $c_p = constante$, entonces nuestra ecuación para la convección no estacionaria, en 1D, es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) = Q$$

donde $Q = \dfrac{S}{c_p \rho}$.

Entonces, el problema que vamos a considerar es el siguiente:



$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) &= Q \\ T(x=0) &= T_A \\ T(x=L) &= T_B \end{aligned} \tag{2}$$

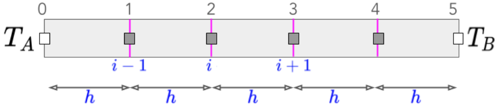
MODELO NUMÉRICO

Convección estacionaria: diferencias centradas

Comenzamos con el caso estacionario, de tal modo que la ecuación (2) se transforma en:

$$u\frac{dT}{dx} - \alpha\frac{d^2T}{dx^2} = Q \tag{3}$$

Discretización:



$$\left.\frac{d^2T(x)}{dx^2}\right|_i \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} \tag{4}$$

$$\left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_i \approx \frac{T(x+h) - T(x-h)}{2h} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \qquad \text{(Dif. centrales)} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$u_i\left(\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}\right) - \alpha_i\left(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}\right) = Q_i \qquad \text{para } i = 1 \ldots N.$$

Convección estacionaria: diferencias centradas

$$\left(\frac{u_i}{2h} - \frac{\kappa_i}{h^2}\right) T_{i+1} + \frac{2\alpha_i}{h^2} T_i + \left(-\frac{u_i}{2h} - \frac{\kappa_i}{h^2}\right) T_{i-1} = Q_i \text{ para } i = 1 \ldots N$$

Esta es una aproximación de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

Definiendo: $b_i = -\frac{u_i}{2h} + \frac{\alpha_i}{h^2}, c_i = \frac{u_i}{2h} + \frac{\alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i$ podemos escribir:

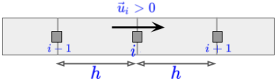
$$\boxed{-b_i T_{i+1} + a_i T_i - c_i T_{i-1} = Q_i} \text{ para } i = 1 \ldots N$$

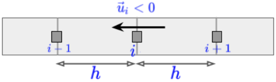
Sistema Lineal:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -c_{N-1} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_N & -b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 + c_0 T_A \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N + b_{N+1} T_B \end{bmatrix} \tag{6}$$

Convección estacionaria: Upwind

La aproximación a la primera derivada dada en la ecuación (5) es de segundo orden pero puede causar oscilaciones numéricas. Una alternativa es usar una aproximación de primer orden, que se basa en la dirección de la velocidad:





$$\left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_i \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{h} \qquad\qquad \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_i \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{h}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } u_i > 0: \qquad u\left(\frac{T_i - T_{i-1}}{h}\right) - \alpha_i\left(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}\right) &= Q_i \\
\Longrightarrow \left(-\frac{\alpha_i}{h^2}\right)T_{i+1} + \left(\frac{u_i}{h} + \frac{2\alpha_i}{h^2}\right)T_i + \left(-\frac{u_i}{h} - \frac{\alpha_i}{h^2}\right)T_{i-1} &= Q_i \qquad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } u_i < 0: \qquad u_i\left(\frac{T_{i+1} - T_i}{h}\right) - \alpha_i\left(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}\right) &= Q_i \\
\Longrightarrow \left(\frac{u_i}{h} - \frac{\alpha_i}{h^2}\right)T_{i+1} + \left(-\frac{u_i}{h} + \frac{2\alpha_i}{h^2}\right)T_i + \left(-\frac{\alpha_i}{h^2}\right)T_{i-1} &= Q_i \qquad (8)
\end{aligned}$$

Convección estacionaria: Upwind

Definimos:

- $\mathrm{ce}_i = \text{máximo}(-u_i/h, 0)$
  - Si $u_i > 0$: $\mathrm{ce}_i = 0$
  - Si $u_i < 0$: $\mathrm{ce}_i = -u_i/h$
- $\mathrm{cw}_i = \text{máximo}(u_i/h, 0)$
  - Si $u_i > 0$: $\mathrm{cw}_i = u_i/h$
  - Si $u_i < 0$: $\mathrm{cw}_i = 0$

Por lo tanto:

$$\text{Para } u_i > 0 \quad : \quad \left(-\mathrm{ce}_i - \frac{\alpha_i}{h^2}\right) T_{i+1} + \left(\frac{u_i}{h} + \frac{2\alpha_i}{h^2}\right) T_i + \left(-\mathrm{cw}_i - \frac{\alpha_i}{h^2}\right) T_{i-1} = Q_i$$

$$\text{Para } u_i < 0 \quad : \quad \left(-\mathrm{ce}_i - \frac{\alpha_i}{h^2}\right) T_{i+1} + \left(-\frac{u_i}{h} + \frac{2\alpha_i}{h^2}\right) T_i + \left(-\mathrm{cw}_i - \frac{\alpha_i}{h^2}\right) T_{i-1} = Q_i$$

Podemos entonces escribir una sola ecuación como sigue:

$$\boxed{-b_i T_{i+1} + a_i T_i - c_i T_{i-1} = Q_i} \text{ para } i = 1 \ldots N$$

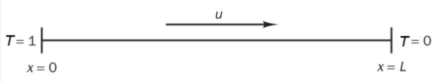
donde $b_i = \mathrm{ce}_i + \dfrac{\alpha_i}{h^2}$, $c_i = \mathrm{cw}_i + \dfrac{\alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i$

En este caso el **sistema lineal** es similar al descrito en la ecuación (6).

Ejemplo 13: Convección estacionaria

Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
c_p \rho \frac{\partial}{\partial x}(uT) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) &= S \\
T(0) &= 1 \\
T(L) &= 0
\end{aligned}
$$



Implementar la solución numérica con diferencias finitas en Python con los siguientes datos: $L = 1.0$ [m], $c_p = 1.0$ [J / Kg °K], $\rho = 1.0$ [kg/m^3], $\kappa = 0.1$ [kg/m s], $S = 0$ y para:

1. $u = 0.1$ [m/s], con 6 nodos.
2. $u = 2.5$ [m/s], con 6 nodos.
3. $u = 2.5$ [m/s], con 20 nodos.

En todos los casos comparar los esquemas de **diferencias centradas** y **upwind** para la aproximación de la primera derivada. Reproduzca las gráficas de la página 16.

Entregue su código documentado en una notebook de nombre `E13_ConvEst.ipynb`.

Ejemplo 13: Convección estacionaria

Hint: Observe que tiene que construir un sistema lineal como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -c_{N-1} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_N & -b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 + c_0 T_A \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N + b_{N+1} T_B \end{bmatrix}$$

Con los siguientes coeficientes:

- Diferencias centradas: $b_i = -\frac{u_i}{2h} + \frac{\alpha_i}{h^2}, c_i = \frac{u_i}{2h} + \frac{\alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i$.
- Upwind: $b_i = \mathrm{ce}_i + \frac{\alpha_i}{h^2}$, $c_i = \mathrm{cw}_i + \frac{\alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i$.

Note que en este caso $\alpha = 0.1$ [m^2/s].

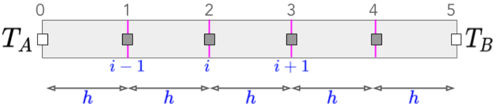
Solución Analítica: $\boxed{T(x) = \frac{\exp\left(\frac{\rho u x}{\kappa}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\rho v L}{\kappa}\right) - 1}(T_L - T_0) + T_0}$

Convección NO estacionaria: diferencias centradas

Consideramos ahora convección con dependencia temporal:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Q \tag{9}$$

Discretización:



$$\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{dx^2}\right|_i^n \approx \frac{T(x-h,t) - 2T(x,t) + T(x+h,t)}{h^2} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{h^2} \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{dx}\right|_i^n \approx \frac{T(x+h,t) - T(x-h,t)}{2h} = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2h} \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_i^n \approx \frac{T(x,t) - T(x,t-h_t)}{h_t} = \frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{h_t} \tag{12}$$

Para $i = 1 \dots N$ y $n = 1 \dots N_t$.

Convección NO estacionaria: diferencias centradas

Sustituyendo las ecuaciones (10), (11) y (12) en (9) obtenemos:

$$\frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{h_t} + u_i\left(\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2h}\right) - \alpha_i\left(\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{h^2}\right) = Q_i$$

$$\Longrightarrow \boxed{-b_i T_{i+1}^n + a_i T_i^n - c_i T_{i-1}^n = Q_i + T_i^{n-1}} \qquad \text{para } i = 1 \ldots N \text{ y } n = 1 \ldots N_t.$$

donde $b_i = -\dfrac{h_t u_i}{2h} + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$, $c_i = \dfrac{h_t u_i}{2h} + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$ y $a_i = \dfrac{2h_t \alpha_i}{h^2} + 1 = b_i + c_i + 1$

Sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -c_{N-1} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_N & -b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{N-1}^n \\ T_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{n-1} \\ T_2^{n-1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n-1} \\ T_N^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 T_A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N+1} T_B \end{bmatrix} \tag{13}$$

Convección NO estacionaria: Upwind

Definimos:

- $\text{ce}_i = \text{máximo}(-u_i/h, 0)$
  - Si $u_i > 0 : \text{ce}_i = 0$
  - Si $u_i < 0 : \text{ce}_i = -u_i/h$
- $\text{cw}_i = \text{máximo}(u_i/h, 0)$
  - Si $u_i > 0 : \text{cw}_i = u_i/h$
  - Si $u_i < 0 : \text{cw}_i = 0$

Al igual que en el caso estacionario podemos entonces escribir una sola ecuación como sigue:

$$\boxed{-b_i T_{i+1} + a_i T_i - c_i T_{i-1} = Q_i} \text{ para } i = 1 \dots N$$

donde $b_i = h_t \text{ce}_i + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$, $c_i = h_t \text{cw}_i + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i + 1$.

En este caso el **sistema lineal** es similar al descrito en la ecuación (13).

Ejercicio 14: Convección dependiente del tiempo

Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= Q & & \\
T(0,t) &= 1 & \text{para} \quad & 0 < t < T_{max} \\
T(L,t) &= 0 & \text{para} \quad & 0 < t < T_{max} \\
T(x,0) &= 0 & \text{para} \quad & 0 < x \leq L
\end{aligned}
$$

Implementar la solución numérica con diferencias finitas en Python con los siguientes datos: $L = 2.5$ [m], $c_p = 1.0$ [J / Kg °K], $\rho = 1.0$ [kg/m^3], $\kappa = 0.1$ [kg/m s], $S = 0$, $h_t = 0.002$ y para:

1. $u = 1.0$ [m/s], con 6 nodos.
2. $u = 2.5$ [m/s], con 6 nodos.
3. $u = 2.5$ [m/s], con 20 nodos.

Entregue su código documentado en una notebook de nombre `E14_ConvNoEst.ipynb`.

Ejercicio 14: Convección dependiente del tiempo

Hint: Observe que tiene que construir un sistema lineal como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -c_{N-1} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_N & -b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{N-1}^n \\ T_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{n-1} \\ T_2^{n-1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n-1} \\ T_N^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 T_A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N+1} T_B \end{bmatrix}$$

Con los siguientes coeficientes:

- Diferencias centradas: $b_i = -\dfrac{h_t u_i}{2h} + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}, c_i = \dfrac{h_t u_i}{2h} + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i + 1$.
- Upwind: $b_i = h_t \mathrm{ce}_i + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$, $c_i = h_t \mathrm{cw}_i + \dfrac{h_t \alpha_i}{h^2}$ y $a_i = b_i + c_i + 1$.

Note que en este caso $\alpha = 0.1$ [m^2/s].

Solución Analítica:

$$\boxed{T(x,t) = 0.5 \left[\mathrm{erfc}\left(\frac{x - ut}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \exp\left(\frac{ux}{\kappa} \right) \mathrm{erfc}\left(\frac{x + ut}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]}$$

Contenido

Problema no estacionario: Advección pura

Encontrar $u(x,t)$ que cumpla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b, \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq T_{max}.$$

- Cond. inicial: $u(x,0) = \eta(x)$ (+ conds. de frontera $\Longrightarrow$ sol. única).
- Problema de Cauchy (PVI):
  - $-\infty \leq x \leq \infty$
  - Solo requiere de la condición inicial.
  - El perfil inicial se mueve a velocidad c, es decir: $u(x,0) = \eta(x - c * t)$

Esquemas de aproximación para Advección ($\left|\frac{ch_t}{h}\right| \leq 1$)

- Orden de aprox. $\mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t)$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ch_t}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

- *Lax-Friedrichs Method* :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n\right) - \frac{ch_t}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

- *Leapfrog Method* :

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{ch_t}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

- *Lax-Wendroff Method* :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ch_t}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{c^2 h_t^2}{2h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

$\left(u(x, t + \delta t) = u(x,t) + h_t u_t(x,t) + \frac{h_t^2}{2} u_{tt}(x,t) + \ldots\right)$

Esquemas de aproximación para Advección

- Upwind $c > 0$ (Estabilidad: $0 \leq \frac{ch_t}{h} \leq 1$):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ch_t}{2h}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$$

- Upwind $c < 0$ (Estabilidad: $-1 \leq \frac{ch_t}{h} \leq 0$):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ch_t}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

- Beam-Warming $c > 0$ (Estabilidad: $0 \leq \frac{ch_t}{h} \leq 2$):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ch_t}{2h}\left(3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right) + \frac{c^2 h_t^2}{2h^2}\left(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right)$$

- Beam-Warming $c < 0$ (Estabilidad: $-2 \leq \frac{ch_t}{h} \leq 0$):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ch_t}{2h}\left(-3u_i^n + 4u_{i+1}^n - u_{i+2}^n\right) + \frac{c^2 h_t^2}{2h^2}\left(u_i^n - 2u_{i+1}^n + u_{i+2}^n\right)$$

Difusión numérica

En el método de Lax-Friedichs podemos escribir:

$$\frac{1}{2}\left(u_{i-1}^{n}+u_{i+1}^{n}\right)=u_{i}^{n}+\frac{1}{2}\left(u_{i-1}^{n}-2u_{i}^{n}+u_{i+1}^{n}\right)$$

Con lo que obtenemos:

$$u_{i}^{n+1}=u_{i}^{n}-\frac{ch_{t}}{2h}\left(u_{i+1}^{n}-u_{i-1}^{n}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{i-1}^{n}-2u_{i}^{n}+u_{i+1}^{n}\right)$$

Que se puede rearreglar como:

$$\left(\frac{u_{i}^{n+1}-u_{i}^{n}}{h_{t}}\right)+c\left(\frac{u_{i+1}^{n}-u_{i-1}^{n}}{2h}\right)=\frac{h^{2}}{2h_{t}}\left(\frac{u_{i-1}^{n}-2u_{i}^{n}+u_{i+1}^{n}}{h^{2}}\right)$$

Esta última discretización es similar a la obtenida de una ecuación como:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}},\ \text{para } \epsilon=h^{2}/2h_{t}$$

Para el método de Upwind: $\epsilon=ch/2$.

Para el método de Lax-Wendroff: $\epsilon=c^{2}h_{t}/2$.

Contenido

- [1] Bergman, T.L. and Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. and Lavine, A.S., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley, **2011**.
- [1] R.J. Leveque, *Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady State and Time-Dependent Problems* , Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, **2007**.
- [2] Y. Saad *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* PWS/ITP 1996. Online: http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html, **2000**
- [3] Richard Burden and J. Douglas Faires *Numerical Analysis* Cengage Learning; 9 edition (August 9, **2010**)
- [4] I. Herrera & G. F. Pinder, *Mathematical Modeling in Science and Engineering: An Axiomatic Approach*, John Wiley **2012**.

Contenido

Créditos

Dr. Luis M. de la Cruz Salas

Departamento de Recursos Naturales

Instituto de Geofísica

Universidad Nacional Autónoma de México

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101019